Missing, poolingを伴う離散サンプリングの統計的推測 (Statistical Prediction and Estimation)

布能, 英一郎

数理解析研究所講究録
1161 巻 2000 年 141-158

Missing, pooling を伴う離散サンプリングの統計的推測

関東学院大経済　布能英一郎 (Eiichiro Funo)

用語　本稿では、母集団からのランダムサンプリングを、観測と略記する。

1. Introduction

1.1.　本稿は、次の２つの定理を示すと共に、これら２つの定理に関連した種々の問題を考察する。

定理 1

第１回目の観測　$(X_{10}, X_{11}, ..., X_{1k-1}, X_{1k}) \sim Multinomial(N_1, \theta_0, \theta_1, ..., \theta_{k-1}, \theta_k)$

第２回目の観測　$(X_{20}, X_{21}, ..., X_{2k-1}) \sim Multinomial(N_2, \dfrac{\theta_0}{\theta_0 + .. + \theta_{k-1}}, ..., \dfrac{\theta_{k-1}}{\theta_0 + .. + \theta_{k-1}})$

⋮

第 k-1 回目の観測　$(X_{k-1\,0}, X_{k-1\,1}, X_{k-1\,2}) \sim Multinomial(N_{k-1}, \dfrac{\theta_0}{\theta_0 + \theta_1 + \theta_2}, ..., \dfrac{\theta_2}{\theta_0 + \theta_1 + \theta_2})$

第 k 回目の観測　$(X_{k0}, X_{k1}) \sim Binomial(N_k, \dfrac{\theta_0}{\theta_0 + \theta_1}, \dfrac{\theta_1}{\theta_0 + \theta_1})$

第１回目の観測で $X_{10} = X_{11} = \ldots = X_{1\,k-1} = 0$ の場合、第２回目以降の観測は行わない。第２回目までの観測 で $X_{10} = X_{20} = \ldots = X_{1\,k-2} = X_{2\,k-2} = 0$ の場合、第３回目以降の観測は行わない。以下、同様の状況を仮定する。そうすると、θ_i (i=0,1,2,...,k) の MLE は、自乗損失下で許容的。

定理 2

第１回目の観測　$(X_{1\,0}, X_{1\,1}, ..., X_{1\,k-1}, X_{1k}) \sim Multinomial(N_1, \theta_0, \theta_1, ..., \theta_{k-1}, \theta_k)$

第２回目の観測　$(X_{2\,0}, X_{2\,1}, ..., X_{2\,k-1}) \sim Multinomial(N_2, \theta_0, \theta_1, ..., \theta_{k-2}, \theta_{k-1} + \theta_k)$

⋮

第 k-1 回目の観測　$(X_{k-1\,0}, X_{k-1\,1}, X_{k-1\,2}) \sim Multinomial(N_{k-1}, \theta_0, \theta_1, \theta_2 + \theta_3 + ... + \theta_k)$

第 k 回目の観測　$(X_{k\,0}, X_{k\,1}) \sim Binomial(N_k, \theta_0,\ \theta_1 + ... + \theta_k)$

第１回目の観測で $X_{10} = X_{11} = \ldots = X_{1\,k-1} = 0$ の場合、第２回目以降の観測は行わない。第２回目までの観測 で $X_{10} = X_{20} = \ldots = X_{1\,k-2} = X_{2\,k-2} = 0$ の場合、第３回目以降の観測は行わない。以下、同様の状況を仮定する。そうすると、θ_i, i=0,1,2,...,k の MLE は、自乗損失下で許容的。

1.2.　定理１および定理２の証明には、stepwise Bayesian procedure を用いるのが簡潔である。stepwise Bayesian procedure とは、次のようなものである。

標本空間を $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, 母数空間を Θ で表記する。以下、離散型確率分布 $P(x\,|\,\theta)$ のみを考え、確率分布・損失関数に次の仮定を置く。

仮定 1. $x \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ に対し、$P(x\,|\,\theta) > 0$ を満たす $\theta \in \Theta$ が少なくとも 1つ存在する。

仮定 2. 損失関数 L は δ に関して strictly convex である。

$\boldsymbol{\mathcal{X}}$ の空でない部分集合 $\boldsymbol{\mathcal{X}}(i)$ に対し、$\Theta(\boldsymbol{\mathcal{X}}(i)) = \{\theta \in \Theta\,|\,g_i(\theta) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P(x\,|\,\theta) > 0\}$ と定める。そうすると、標本空間を $\boldsymbol{\mathcal{X}}(i)$, 母数空間を $\Theta(\boldsymbol{\mathcal{X}}(i))$ とする restricted probability distribution $P_{\mathcal{X}(i)}(x\,|\,\theta)/g_i(\theta)$

が well-defined である。Θ の空でない部分集合 Θ^* に対して、Θ^* 上で定義されている事前確率 $d\tau(\theta)$ に対し、$\Theta - \Theta^*$ 上で zero mass を持つと定める。これにより、$d\tau(\theta)$ は Θ 上で定義された事前確率となる。$g(x:\tau) = \int P(x\,|\,\theta)d\tau(\theta)$ と定める。

定理 3

$\boldsymbol{\mathcal{X}}$ の空でない部分集合の列 $\{\boldsymbol{\mathcal{X}}(i)\,|\,i\in I\}$ と，事前確率の列 $\{d\tau_i(\theta)\,|\,i\in I\}$ が

(a) $\boldsymbol{\mathcal{X}}(1) = \{x\in\boldsymbol{\mathcal{X}}\,|\,g(x:\tau_1) > 0\}, ..., \boldsymbol{\mathcal{X}}(j) = \{x\in\boldsymbol{\mathcal{X}} - \boldsymbol{\mathcal{X}}(2) - ... - \boldsymbol{\mathcal{X}}(j-1)\,|\,g(x:\tau_j) > 0\}$ を満たし、かつ $\boldsymbol{\mathcal{X}}(i) \neq \emptyset$, $\boldsymbol{\mathcal{X}} = \bigcup_{i\in I}\boldsymbol{\mathcal{X}}(i)$ を満たす

(b) $\Theta(i) = \{\theta\in\Theta(\boldsymbol{\mathcal{X}}(i)) : d\tau_i(\theta)$ は positive mass を持つ $\}$ と置くと、$\{\Theta(i)\,|\,i\in I\}$ は disjoint

(c) 推定量 $\delta(x)$ が各 $(\Theta(i), \boldsymbol{\mathcal{X}}(i))$ 上で事前確率 $d\tau_i(\theta)$ より一意に定まる Bayes 解

ならば、$\delta(x)$ は $(\Theta, \boldsymbol{\mathcal{X}})$ で許容的。

1.3. stepwise Bayesian procedure を用いた許容性証明の例

例 1　三項分布 $P(x_0, x_1, x_2\,|\,\theta_0, \theta_1, \theta_2) = \dfrac{n!}{x_0!\,x_1!\,x_2!}\theta_0^{x_0}\theta_1^{x_1}\theta_2^{x_2}$, $x_0 + x_1 + x_2 = n$, $\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1$, $0 \leq \theta_0, \theta_1, \theta_2 \leq 1$ にて、$\hat{\theta}_i$ (θ_i の MLE) の自乗損失下での許容性を考察する。

母数空間 $\Theta = \{(\theta_0, \theta_1, \theta_2)\,|\,\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1,\ 0 \leq \theta_i \leq 1\}$ 上に the sequence priors $\{\, d\tau_i(\theta)\,|\,i = 1, 2, 3\}$ を

$d\tau_1(\theta)$: $\theta_i = 1$ (i=0,1,2) にのみ集中する事前確率

$d\tau_2(\theta)$: $\theta_i + \theta_j = 1,\ 0 < \theta_i, \theta_j < 1,\ i \neq j$ にのみ集中する事前確率で、かつ

$$d\tau_2(\theta) \propto (restriction)\sum_{i\neq j}\frac{d\theta_i}{\theta_i\theta_j}$$

$$d\tau_3(\theta) \propto (restriction)\frac{d\theta_1 d\theta_2}{\theta_0\theta_1\theta_2}$$

で導入する。そうすると、標本空間の分割は

$\boldsymbol{\mathcal{X}}(1) = \{(n,0,0), (0,n,0), (0,0,n)\}$,　$\boldsymbol{\mathcal{X}}(2) = \{(x_0, x_1, 0)\}\cup\{(x_0, 0, x_2)\}\cup\{(0, x_1, x_2)\}$,

$\boldsymbol{\mathcal{X}}(3) = \{(x_0, x_1, x_2)\}$

で与えられる。　なお、この表記で、$1 \leq x_i \leq n-1$, $x_0 + x_1 + x_2 = n$ なる条件を省略してある。また

$\Theta(1) = \Theta(\boldsymbol{\mathcal{X}}(1)) = \{(1,0,0)\}\cup\{(0,1,0)\}\cup\{(0,0,1)\}$,

$\Theta(2) = \Theta(\boldsymbol{\mathcal{X}}(2)) = \{(\theta_0, \theta_1, 0)\}\cup\{(\theta_0, 0, \theta_2)\}\cup\{(0, \theta_1, \theta_2)\}$,　$\Theta(3) = \Theta(\boldsymbol{\mathcal{X}}(3)) = \{(\theta_0, \theta_1, \theta_2)\}$

であることも直ちにわかる。なお、この表記は $0 < \theta_i < 1$,　$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1$ なる条件を省略してある。

あとは、各 $(\Theta(i), \boldsymbol{\mathcal{X}}(i))$ 上で $d\tau_i(\theta)$ より定まる θ_i の Bayes 解を計算すれば、Bayes 解が MLE と一致することが示される。よって、$\hat{\theta}_i = x_i/n$ は自乗損失下で許容的。

2. 定理１，２ の証明

本節では、定理１，２ の証明を k=3 の場合に示す。一般の k に対する証明も、同様である。

2.1 k=3 の場合の定理１の証明　すなわち、

$(X_0, X_1, X_2, X_3) \sim Multinomial(N_1, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$,　$(Y_0, Y_1, Y_2) \sim Multinomial(N_2, \theta_0', \theta_1', \theta_2')$,

$(Z_0, Z_1) \sim Binomial(N_3, \theta_0", \theta_1")$ 但し $\theta_i' = \theta_i/(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2)$, $\theta_j" = \theta_j'/(\theta_0' + \theta_1')$ の場合は

$$\hat{\theta}_0 = \frac{x_0 + y_0 + z_0}{x_0 + x_1 + y_0 + y_1 + z_0 + z_1}\,\frac{x_0 + x_1 + y_0 + y_1}{x_0 + x_1 + x_2 + y_0 + y_1 + y_2}\,\frac{x_0 + x_1 + x_2}{x_0 + x_1 + x_2 + x_3},$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{x_1 + y_1 + z_1}{x_0 + x_1 + y_0 + y_1 + z_0 + z_1}\,\frac{x_0 + x_1 + y_0 + y_1}{x_0 + x_1 + x_2 + y_0 + y_1 + y_2}\,\frac{x_0 + x_1 + x_2}{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{x_2+y_2}{x_0+x_1+x_2+N_2}\,\frac{x_0+x_1+x_2}{x_0+x_1+x_2+x_3} \quad \hat{\theta}_3 = \frac{x_3}{x_0+x_1+x_2+x_3}$$

である。stepwise Bayes 法を用いると、この推定量の自乗損失下での許容性を次のようにして示せる
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(N_1) = \{(0,0,0,N_1)\}$, $\quad \boldsymbol{\mathcal{X}}(N_1,\, N_2) = \{(0,0,x_2,x_3,0,0,N_2)\,|\,x_3 \le N_1-1,\; x_2+x_3 = N_1\}$,
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(N_1,\, N_2, N_3) = \{(x_0,x_1,x_2,x_3,y_0,y_1,y_2,z_0,z_1)\,|\,x_i = 0,1,...,N_1,\; x_0+x_1+x_2+x_3 = N_1,\; x_3 \le N_1 - 1,\; y_i = 0,1,...,N_2,\; y_0+y_1+y_2 = N_2,\; z_i = 0,1,...,N_3,\; z_0+z_1 = N_3,\; x_0+x_1+y_0+y_1+z_0+z_1 \ge 1\}$ と定める。

最初に、標本空間 $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ は、$\boldsymbol{\mathcal{X}} = \boldsymbol{\mathcal{X}}(N_1) \cup \boldsymbol{\mathcal{X}}(N_1,\, N_2) \cup \boldsymbol{\mathcal{X}}(N_1,\, N_2\, N_3)$ であることに注意する。
母数空間 $\Theta = \{(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3)\,|\,\theta_0+\theta_1+\theta_2+\theta_3 = 1,\; 0 \le \theta_i \le 1\}$ 上に the sequence of priors $\{\,d\tau_i(\theta)\,|\,i = 1,2,3,4\}$ を

$d\tau_1(\theta)$: $\theta_i = 1$ (i=0,1,2,3) にのみ集中する事前確率

$d\tau_2(\theta)$: $\theta_i + \theta_j = 1,\; 0 < \theta_i, \theta_j < 1,\; i \ne j$ にのみ集中する事前確率で、かつ

$$d\tau_2(\theta) \propto (restriction) \sum_{i \ne j} \frac{d\theta_i}{\theta_i\theta_j}$$

$d\tau_3(\theta)$: $\theta_i + \theta_j + \theta_k = 1,\; 0 < \theta_i, \theta_j, \theta_k < 1,\; i \ne j \ne k$ にのみ集中する事前確率で、かつ

$$d\tau_3(\theta) \propto (restriction) \sum_{i \ne j \ne k} \frac{d\theta_i d\theta_j}{\theta_i\theta_j\theta_k}$$

$$d\tau_4(\theta) \propto (restriction) \frac{d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3}{\theta_0\theta_1\theta_2\theta_3}$$

で導入する。そうすると、標本空間の分割は

$\boldsymbol{\mathcal{X}}(1) = \bigcup_{i=1}^{4} \boldsymbol{\mathcal{X}}(1,i)$, $\quad \boldsymbol{\mathcal{X}}(2) = \bigcup_{i,j,\, i \ne j} \boldsymbol{\mathcal{X}}(2,\, i\!:\!j)$, $\quad \boldsymbol{\mathcal{X}}(3) = \bigcup_{i,j,k,\, i \ne j \ne k} \boldsymbol{\mathcal{X}}(3,\, i\!:\!j\!:\!k)$,
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(4) = \{(x_0,x_1,x_2,x_3,y_0,y_1,y_2,z_0,z_1)\}$

で与えられる。 ここで、

$\boldsymbol{\mathcal{X}}(1,0) = \{(N_1,0,0,0,N_2,0,0,N_3,0)\}$, $\quad \boldsymbol{\mathcal{X}}(1,1) = \{(0,N_1,0,0,0,N_2,0,0,N_3)\}$,
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(1,2) = \{(0,0,N_1,0,0,0,N_2)\}$, $\quad \boldsymbol{\mathcal{X}}(1,3) = \{(0,0,0,N_1)\} = \boldsymbol{\mathcal{X}}(N_1)$,
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(2,\, 0\!:\!1) = \{(x_0,x_1,0,0,y_0,y_1,0,z_0,z_1)\}$, $\quad \boldsymbol{\mathcal{X}}(2,\, 0\!:\!2) = \{(x_0,0,x_2,0,y_0,0,y_2,N_3,0)\}$,
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(2,\, 0\!:\!3) = \{(x_0,0,0,x_3,N_2,0,0,N_3,0)\}$, $\quad \boldsymbol{\mathcal{X}}(2,\, 1\!:\!2) = \{(0,x_1,x_2,0,0,y_1,y_2,0,N_3)\}$,
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(2,\, 1\!:\!3) = \{(0,x_1,0,x_3,0,N_2,0,N_3,0)\}$, $\quad \boldsymbol{\mathcal{X}}(2,\, 2\!:\!3) = \{(0,1,x_2,x_3,0,0,N_2)\}$,
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(3,\, 0\!:\!1\!:\!2) = \{(x_0,x_1,x_2,0,y_0,y_1,y_2,z_0,z_1)\}$, $\quad \boldsymbol{\mathcal{X}}(3,\, 0\!:\!1\!:\!3) = \{(x_0,x_1,0,x_3,y_0,y_1,0,z_0,z_1)\}$,
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(3,\, 0\!:\!2\!:\!3) = \{(x_0,0,x_2,x_3,y_0,0,y_2,N_3,0)\}$, $\quad \boldsymbol{\mathcal{X}}(3,\, 1\!:\!2\!:\!3) = \{(0,x_1,x_2,x_3,0,y_1,y_2,0,N_3)\}$.
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(4) = \{(x_0,x_1,x_2,x_3,y_0,y_1,y_2,z_0,z_1)\}$

であるが、上記の表記で、$1 \le x_i \le N_1 - 1,\; x_0+x_1+x_2+x_3 = N_1,\;\; 1 \le y_j \le N_2 - 1, y_0+y_1+y_2 = N_2,\;\; 1 \le z_k \le N_3 - 1,\; z_0+z_1 = N_3$ なる条件を省略してある。これらより

$$\Theta(1) = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

$$\Theta(2) = \cup_{i,j}\{(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3) \in \Theta\,|\,\theta_i = \theta_j = 0,\; 0 < \theta_k, \theta_l < 1,\;\; for\ all\ k, l \ne i, j\,\}$$

$$\Theta(3) = \cup_i\{(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3) \in \Theta\,|\,\theta_i = 0,\; 0 < \theta_j < 1,\;\; for\ all\ j \ne i\}$$

$$\Theta(4) = \{(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3) \in \Theta\,|\,0 < \theta_i < 1,\;\; for\ all\ i\}$$

が示され、更に、定理の条件 (a),(b) が満たされることがわかる。あとは各 $\{(\Theta(i), \boldsymbol{\mathcal{X}}(i))\,|\,i = 1,2,3,4\}$ 上でベイズ解と MLE が一致することを示せばよい。 $(\Theta(4), \boldsymbol{\mathcal{X}}(4))$ 上でのベイズ解の計算は、次の通り。

$$P_{\mathcal{X}(4)}(x,y,z|\theta) \propto \frac{\theta_0^{x_0}\theta_1^{x_1}\theta_2^{x_2}\theta_3^{x_3}}{restriction}$$
$$\times\left(\frac{\theta_0}{\theta_0+\theta_1+\theta_2}\right)^{y_0}\left(\frac{\theta_1}{\theta_0+\theta_1+\theta_2}\right)^{y_1}\left(\frac{\theta_2}{\theta_0+\theta_1+\theta_2}\right)^{y_2}\left(\frac{\theta_0}{\theta_0+\theta_1}\right)^{z_0}\left(\frac{\theta_1}{\theta_0+\theta_1}\right)^{z_1}$$

であるから、$s_0=\theta_0+\theta_1+\theta_2$, $s_1=(\theta_0+\theta_1)/(\theta_0+\theta_1+\theta_2)$, $s_2=\theta_0/(\theta_0+\theta_1)$. なる変数変換を行う。そうすると $\theta_0=s_0s_1s_2$, $\theta_1=s_0s_1(1-s_2)$, $\theta_2=s_0(1-s_1)$, $\theta_3=1-s_0$ であり、

$$0<\theta_0,\,\theta_1,\,\theta_2<1,\,0<\theta_0+\theta_1+\theta_2<1 \quad\Leftrightarrow\quad 0<s_0,\,s_1,\,s_2,\,s_3<1$$

$$|J|=\begin{vmatrix}\partial\theta_0/\partial s_0 & \partial\theta_0/\partial s_1 & \partial\theta_0/\partial s_2\\ \partial\theta_1/\partial s_0 & \partial\theta_1/\partial s_1 & \partial\theta_1/\partial s_2\\ \partial\theta_2/\partial s_0 & \partial\theta_2/\partial s_1 & \partial\theta_2/\partial s_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}s_1s_2 & s_0s_2 & s_0s_1\\ s_1(1-s_2) & s_0(1-s_2) & -s_0s_1\\ 1-s_1 & -s_0 & 0\end{vmatrix}=s_0^2s_1$$

である。よって

$$\int P_{\mathcal{X}(4)}(x,y,z|\theta)d\tau_4(\theta)=\iiint\frac{\theta_0^{x_0}\theta_1^{x_1}\theta_2^{x_2}\theta_3^{x_3}}{restriction}\left(\frac{\theta_0}{\theta_0+\theta_1+\theta_2}\right)^{y_0}\left(\frac{\theta_1}{\theta_0+\theta_1+\theta_2}\right)^{y_1}$$
$$\times\left(\frac{\theta_2}{\theta_0+\theta_1+\theta_2}\right)^{y_2}\left(\frac{\theta_0}{\theta_0+\theta_1}\right)^{z_0}\left(\frac{\theta_1}{\theta_0+\theta_1}\right)^{z_1}\frac{restriction}{\theta_0\theta_1\theta_2\theta_3}d\theta_0d\theta_1d\theta_2$$
$$=\iiint(s_0s_1s_2)^{x_0-1}(s_0s_1(1-s_2))^{x_1-1}(s_0(1-s_1))^{x_2-1}(1-s_0)^{x_3-1}$$
$$\times(s_1s_2)^{y_0}(s_1(1-s_2))^{y_1}(1-s_1)^{y_2}s_2^{z_0}(1-s_2)^{z_1}|J|ds_0ds_1ds_2$$
$$=\int_0^1 s_0^{x_0+x_1+x_2-1}(1-s_0)^{x_3-1}ds_0\int_0^1 s_1^{x_0+y_0+x_1+y_1-1}(1-s_1)^{x_2+y_2-1}ds_1$$
$$\times\int_0^1 s_2^{x_0+y_0+z_0-1}(1-s_2)^{x_1+y_1+z_1-1}ds_2$$
$$=B(x_0+x_1+x_2,x_3)\,B(x_0+y_0+x_1+y_1,x_2+y_2)\,B(x_0+y_0+z_0,x_1+y_1+z_1)$$

を得る。

全く同様な計算方法により

$$\int\theta_0P_{\mathcal{X}(4)}(x,y,z|\theta)d\tau_4(\theta)$$
$$=B(x_0+x_1+x_2+1,x_3)\,B(x_0+y_0+x_1+y_1+1,x_2+y_2)\,B(x_0+y_0+z_0+1,x_1+y_1+z_1)$$
$$\int\theta_1P_{\mathcal{X}(4)}(x,y,z|\theta)d\tau_4(\theta)$$
$$=B(x_0+x_1+x_2+1,x_3)\,B(x_0+y_0+x_1+y_1+1,x_2+y_2)\,B(x_0+y_0+z_0,x_1+y_1+z_1+1)$$
$$\int\theta_2P_{\mathcal{X}(4)}(x,y,z|\theta)d\tau_4(\theta)$$
$$=B(x_0+x_1+x_2+1,x_3)\,B(x_0+y_0+x_1+y_1,x_2+y_2+1)\,B(x_0+y_0+z_0,x_1+y_1+z_1)$$
$$\int\theta_3P_{\mathcal{X}(4)}(x,y,z|\theta)d\tau_4(\theta)$$
$$=B(x_0+x_1+x_2,x_3+1)\,B(x_0+y_0+x_1+y_1,x_2+y_2)\,B(x_0+y_0+z_0,x_1+y_1+z_1)$$

を得る。以上より

$$\theta_{0\,Bayes} = \frac{\int \theta_0 P_{\mathcal{X}(4)}(x,\,y,\,z\,|\,\theta) d\tau_4(\theta)}{\int P_{\mathcal{X}(4)}(x,\,y,\,z\,|\,\theta) d\tau_4(\theta)}$$

$$= \frac{B(x_0+x_1+x_2+1, x_3)\, B(x_0+y_0+x_1+y_1+1, x_2+y_2)\, B(x_0+y_0+z_0+1, x_1+y_1+z_1)}{B(x_0+x_1+x_2, x_3)\, B(x_0+y_0+x_1+y_1, x_2+y_2)\, B(x_0+y_0+z_0, x_1+y_1+z_1)}$$

$$= \frac{x_0+x_1+x_2}{x_0+x_1+x_2+x_3} \frac{x_0+y_0+x_1+y_1}{x_0+y_0+x_1+y_1+x_2+y_2} \frac{x_0+y_0+z_0}{x_0+y_0+z_0+x_1+y_1+z_1}$$

$$\theta_{1\,Bayes} = \frac{\int \theta_1 P_{\mathcal{X}(4)}(x,\,y,\,z\,|\,\theta) d\tau_4(\theta)}{\int P_{\mathcal{X}(4)}(x,\,y,\,z\,|\,\theta) d\tau_4(\theta)}$$

$$= \frac{x_0+x_1+x_2}{x_0+x_1+x_2+x_3} \frac{x_0+y_0+x_1+y_1}{x_0+y_0+x_1+y_1+x_2+y_2} \frac{x_1+y_1+z_1}{x_0+y_0+z_0+x_1+y_1+z_1}$$

$$\theta_{2\,Bayes} = \frac{\int \theta_2 P_{\mathcal{X}(4)}(x,\,y,\,z\,|\,\theta) d\tau_4(\theta)}{\int P_{\mathcal{X}(4)}(x,\,y,\,z\,|\,\theta) d\tau_4(\theta)} = \frac{x_0+x_1+x_2}{x_0+x_1+x_2+x_3} \frac{x_2+y_2}{x_0+y_0+x_1+y_1+x_2+y_2}$$

$$\theta_{3\,Bayes} = \frac{\int \theta_3 P_{\mathcal{X}(4)}(x,\,y,\,z\,|\,\theta) d\tau_4(\theta)}{\int P_{\mathcal{X}(4)}(x,\,y,\,z\,|\,\theta) d\tau_4(\theta)} = \frac{x_3}{x_0+x_1+x_2+x_3}$$

が得られた。 $(\Theta(i), \boldsymbol{\mathcal{X}}(i))$, $i=1,2,3$ 上でベイズ解とMLEが一致することは、上記の計算方法を更に簡略化したものなので、省略する。このようにして θ_{MLE} の自乗損失下での許容性が示せた。

2.2 k=3 の場合の定理２の証明 すなわち、

$(X_0, X_1, X_2, X_3) \sim Multinomial(N_1, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$,
$(Y_0, Y_1, Y_2) \sim Multinomial(N_2, \theta_0, \theta_1, \theta_2+\theta_3)$,
$(Z_0, Z_1) \sim Binomial(N_3, \theta_0, \theta_1+\theta_2+\theta_3)$

の場合、$\theta_1 = (1-\theta_0)\xi$, $\theta_2 = (1-\theta_0)(1-\xi)\eta$, $\theta_2 = (1-\theta_0)(1-\xi)(1-\eta)$ と、パラメータを変更して考える。そうすると、考えているモデルは

observation	probability	number of observations
X_0	θ_0	x_0
X_1	$(1-\theta_0)\xi$	x_1
X_2	$(1-\theta_0)(1-\xi)\eta$	x_2
X_3	$(1-\theta_0)(1-\xi)(1-\eta)$	x_3
Y_0	θ_0	y_0
Y_1	$(1-\theta_0)\xi$	y_1
Y_2	$(1-\theta_0)(1-\xi)$	y_2
Z_0	θ_0	z_0
Z_1	$1-\theta_0$	z_1

と書き表される。そうすると、ＭＬＥの計算およびＭＬＥの自乗損失下での許容性の証明が容易である。なお、このようなパラメータ変更のアイデアは、Meeden, Ghosh, Srinivasan, Vardeman(1989) を参考にした。実際の計算結果は次の通り：

$$P(x,y,z\,|\,\theta) \propto \theta_0^{x_0+y_0+z_0}(1-\theta_0)^{x_1+x_2+x_3+y_1+y_2+z_1}\xi^{x_1+y_1}(1-\xi)^{x_2+x_3+y_2}\eta^{x_2}(1-\eta)^{x_3}$$

これより直ちに MLE を求めることができる：

$$\hat{\theta}_0 = \frac{x_0+y_0+z_0}{N_1+N_2+N_3}, \quad \hat{\xi} = \frac{x_1+y_1}{x_1+x_2+x_3+y_1+y_2}, \quad \hat{\eta} = \frac{x_2}{x_2+x_3}$$

$$\hat{\theta}_1 = (1-\hat{\theta}_0)\hat{\xi} = \frac{x_1+x_2+x_3+y_1+y_2+z_1}{N_1+N_2+N_3}\frac{x_1+y_1}{x_1+x_2+x_3+y_1+y_2}$$

$$\hat{\theta}_2 = (1-\hat{\theta}_0)(1-\hat{\xi})\hat{\eta} = \frac{x_1+x_2+x_3+y_1+y_2+z_1}{N_1+N_2+N_3}\frac{x_2+x_3+y_2}{x_1+x_2+x_3+y_1+y_2}\frac{x_2}{x_2+x_3}$$

$$\hat{\theta}_3 = (1-\hat{\theta}_0)(1-\hat{\xi})(1-\hat{\eta}) = \frac{x_1+x_2+x_3+y_1+y_2+z_1}{N_1+N_2+N_3}\frac{x_2+x_3+y_2}{x_1+x_2+x_3+y_1+y_2}\frac{x_3}{x_2+x_3}$$

母数空間 $\Theta = \{(\theta_0,\xi,\eta)\,|\,0 \le \theta_0,\ \xi,\ \eta \le 1\}$ 上に the sequence of priors $\{d\tau_i(\theta_0,\xi,\eta)\,|\,i=1,2,3,4\}$ を

$$d\tau_1(\theta_0,\xi,\eta) = \frac{1}{4}dI_{\{\theta_0=1\}}(\theta_0)d\tau(\xi,\eta) + \frac{1}{4}dI_{\{\theta_0=0\}}(\theta_0)dI_{\{\xi=1\}}(\xi)d\tau(\eta)$$
$$+\frac{1}{4}dI_{\{\theta_0=0\}}(\theta_0)dI_{\{\xi=0\}}(\xi)\Big(dI_{\{\eta=0\}}(\eta)+dI_{\{\eta=1\}}(\eta)\Big)$$

$$d\tau_2(\theta_0,\xi,\eta) \propto \frac{restriction}{5}dI_{\{\theta_0=0\}}(\theta_0)dI_{\{\eta=0\}}(\eta)\frac{d\xi}{\xi(1-\xi)}$$
$$+\frac{restriction}{5}dI_{\{\theta_0=0\}}\Big(dI_{\{\xi=0\}}(\xi)+dI_{\{\xi=1\}}(\xi)\Big)\frac{d\eta}{\eta(1-\eta)}$$
$$+\frac{restriction}{5}dI_{\{\xi=0\}}(\xi)\Big(dI_{\{\eta=0\}}(\eta)+dI_{\{\eta=1\}}(\eta)\Big)\frac{d\theta_0}{\theta_0(1-\theta_0)}$$

$$d\tau_3(\theta_0,\xi,\eta) \propto \frac{restriction}{4}dI_{\{\xi=0\}}(\xi)\frac{d\eta d\theta_0}{\eta(1-\eta)\theta_0(1-\theta_0)}$$
$$+\frac{restriction}{4}\Big(dI_{\{\eta=0\}}(\eta)+dI_{\{\eta=1\}}(\eta)\Big)\frac{d\xi d\theta_0}{\xi(1-\xi)\theta_0(1-\theta_0)}$$
$$+\frac{restriction}{4}dI_{\{\theta_0=0\}}(\theta_0)\frac{d\xi d\eta}{\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)}$$

$$d\tau_4(\theta_0,\xi,\eta) \propto \frac{restriction}{\theta_0(1-\theta_0)\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)}d\theta_0 d\xi d\eta$$

で導入する。そうすると、標本空間の分割は

$\boldsymbol{\mathcal{X}}(1) = \bigcup_{i=0}^{3}\boldsymbol{\mathcal{X}}(1,i), \quad \boldsymbol{\mathcal{X}}(2) = \bigcup_{i=0}^{5}\boldsymbol{\mathcal{X}}(2,i), \quad \boldsymbol{\mathcal{X}}(3) = \bigcup_{j=0}^{3}\boldsymbol{\mathcal{X}}(3,j),$

$\boldsymbol{\mathcal{X}}(4) = \{(x_0,x_1,x_2,x_3,y_0,y_1,y_2,z_0,z_1)\in\boldsymbol{\mathcal{X}}\,|\,1 \le x_i \le N_1-1,\ 1 \le y_j \le N_2-1,\ 1 \le z_k \le N_3-1\}$

で与えられる。ここで $\boldsymbol{\mathcal{X}}(i,j)$ は次のページの表で定められるもの。この表では $x_0,x_1,x_2,x_3,y_0,y_1,y_2,z_0,z_1$ に対して $1 \le x_i \le N_1-1$, $1 \le y_j \le N_2-1$, $1 \le z_k \le N_3-1$ の条件を省略して記述している。また、- とは、「第1回目の観測で $X_{10}=X_{11}=X_{12}=0$ の場合、第2回目以降の観測は行わない。第2回目までの観測 で $X_{10}=X_{20}=X_{1\,k-2}=X_{2\,k-2}=0$ の場合、第3回目の観測は行わない。」との条件により、観測がなされないことを示すものである。

あとは各標本空間 $\boldsymbol{\mathcal{X}}(i)$ 上で $d\tau_i(\theta_0,\xi,\eta)$ に対するベイズ解を求めれば良い。これは容易に計算でき、MLE に一致することがわかる。

標本分割	X_0	Y_0	Z_0	X_1	Y_1	X_2	X_3	Z_1	Y_2	Marginal が positive となるような事前確率
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(1,0)$	N_1	N_2	N_3	0	0	0	0	0	0	$\theta_0 = 1$ に集中
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(1,1)$	0	0	0	N_1	N_2	0	0	N_3	0	$\theta_0 = 0,\ \xi = 1$ に集中
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(1,2)$	0	0	-	0	0	0	N_1	0	N_2	$\theta_0 = 0,\ \xi = 0\ \eta = 1$ に集中
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(1,3)$	0	-	-	0	-	0	N_1	-	-	$\theta_0 = 0,\ \xi = 0\ \eta = 0$ に集中
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(2,0)$	x_0	y_0	z_0	x_1	y_1	0	0	z_1	0	$\xi = 1$ に集中
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(2,1)$	0	0	0	0	0	x_2	x_3	N_3	y_2	$\theta_0 = 0,\ \xi = 0$ に集中
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(2,2)$	0	0	0	x_1	y_1	0	x_3	N_3	y_2	$\theta_0 = 0,\ \eta = 0$ に集中
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(2,3)$	0	0	0	x_1	y_1	x_2	0	N_3	y_2	$\theta_0 = 0,\ \eta = 1$ に集中
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(2,4)$	x_0	y_0	z_0	0	0	0	x_3	z_1	y_2	$\xi = 0\ \eta = 0$ に集中
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(2,5)$	x_0	y_0	z_0	0	0	x_2	0	z_1	y_2	$\xi = 0\ \eta = 1$ に集中
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(3,0)$	0	0	0	x_1	y_1	x_2	x_3	N_3	y_2	$\theta_0 = 0$ に集中
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(3,1)$	x_0	y_0	z_0	0	0	x_2	x_3	z_1	y_2	$\xi = 0$ に集中
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(3,2)$	x_0	y_0	z_0	x_1	y_1	0	x_3	z_1	y_2	$\eta = 0$ に集中
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(3,3)$	x_0	y_0	z_0	x_1	y_1	x_2	0	z_1	y_2	$\eta = 1$ に集中
$\boldsymbol{\mathcal{X}}(4)$	x_0	y_0	z_0	x_1	y_1	x_2	x_3	z_1	y_2	内部

3. 定理１，２ の拡張

定理１，２ では、各観測に多項分布を仮定した。しかし、多項分布でなくても定理１と同様の結果が得られる場合がある。

次のような性質を満たすような確率分布を $\mathcal{D}(\theta_0, \theta_1, ..., \theta_k)$ とする。

1. 母数空間 $\boldsymbol{\Theta} = \{(\theta_0, \theta_1, ..., \theta_k) \in \mathbf{R}^{k+1} \,|\, 0 \leq \theta_i \leq 1,\ \theta_0 + \theta_1 + ... + \theta_k = 1\}$
2. 標本空間 $\boldsymbol{\mathcal{X}} = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_k) \in \mathbf{R}^{k+1}\}$.
3. $P(\mathbf{x} \,|\, \theta_0, \theta_1, ..., \theta_k) = c(\mathbf{x}) \prod_{i=0}^{k} \theta_i^{a_i(x_i)}$
4. 関数 $a_i(x_i)$ は　$a_i(x_i) = b_i x_i + d_i$,　$b_i \geq 0,\ d_i \geq 0$ であって、かつ　$b_i > 0$ for all i=k-m, k-m+1, ... k
5. ・各 $i = 0, 1, ..., k$ に対し、$c(\mathbf{x}^{[i]}) > 0,\ a_i(x_i^{[i]}) > 0,\ a_j(x_j^{[i]}) = 0\ for\ all\ j \neq i$ となるような $\mathbf{x}^{[i]} = (x_0^{[i]}, x_1^{[i]}, ..., x_k^{[i]}) \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ が存在する。

   ・各非負の整数 $i,\ j$ such that $0 \leq i < j < k$ に対し、$c(\mathbf{x}^{[ij]}) > 0,\ \ a_i(x_i^{[ij]}) > 0,\ \ a_j(x_j^{[ij]}) > 0,\ a_h(x_h^{ij}) = 0\ \ for\ all\ \ h \neq i, j$ となるような $\mathbf{x}^{[ij]} = (x_0^{[ij]}, x_1^{[ij]}, ..., x_k^{[ij]}) \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ が存在する。

   $\vdots$

   ・$c(\mathbf{x}^{[012...k]}) > 0,\ a_0(x_0^{[012...k]}) > 0,\ a_1(x_1^{[012...k]}) > 0, ..., a_k(x_k^{[012...k]}) > 0$ となるような $\mathbf{x}^{[012...k]} = (x_0^{[012...k]}, x_1^{[012...k]}, ..., x_k^{[012...k]}) \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ が存在する。

定理４　第１回目の観測 $(X_{1\,0}, X_{1\,1}, ..., X_{1\,k-1}, X_{1\,k})$, 第２回目の観測 $(X_{2\,0}, X_{2\,1}, ..., X_{2\,k-1})$, ..., 第 m 回目の観測 $(X_{m\,0}, X_{m\,1}, ..., X_{m\,k-m})$, に関して、第１回目の観測で $X_{11} = ... = X_{1\,k-1} = 0$ の場合、第２

回目以降の観測は行わない。第2回目までの観測 で $X_{10}=X_{20}=X_{11}=X_{21}=\ldots=X_{1\,k-2}=X_{2\,k-2}=0$ の場合、第3回目以降の観測は行わない。以下、同様の状況を仮定する。更に、確率分布に関して、第1回目の観測が $\mathcal{D}(\theta_0,\theta_1,...,\theta_k)$ に従い、第j回目の観測 (j=2,3,...,m) が

$$\mathcal{D}(\frac{\theta_0}{\theta_0+...+\theta_{k-j+1}},\ldots,\frac{\theta_{k-j+1}}{\theta_0+...+\theta_{k-j+1}})$$

に従うならば、θ_i (i=0,1,2,...,k) の MLE は、自乗損失下で許容的。

定理5 Sampling に関して、定理4と同じ仮定をする。確率分布に関して、第1回目の観測が $\mathcal{D}(\theta_0,\theta_1,...,\theta_k)$ に従い、第j回目の観測 (j=2,3,...,m) が $\mathcal{D}(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_{k-j+1},\theta_{k-j+1}+\theta_{k-j+2}+\ldots+\theta_k)$ に従うならば、θ_i (i=0,1,2,...,k) の MLE は、自乗損失下で許容的。

例 2 $\mathcal{D}(\theta_0,\theta_1,...,\theta_k)$ の例として、多項分布の他に、次のようなものが考えられる。

$P(x_1,...,x_k\,|\,\theta_0,\theta_1,...,\theta_k)$

$$=\begin{cases}\dfrac{(x_1+...+x_k)!}{x_1!...x_k!}\theta_0\theta_1^{x_1}\theta_2^{x_2}...\theta_k^{x_k} & \text{if } x_1+x_2+\ldots+x_k<n\\ & x_i=0,\,1,...,n-1 \text{ for all i=1,2,...,k,}\\ \dfrac{n!}{x_1!...x_k!}\theta_1^{x_1}\theta_2^{x_2}...\theta_k^{x_k} & \text{if } x_1+x_2+\ldots+x_k=n\\ & x_i=0,\,1,...,n \text{ for all i=1,2,...,k,}\end{cases}$$

なお、この確率分布は、一次元確率分布

$$P(x\,|\,\theta)=\begin{cases}(1-\theta)\theta^x & \text{if } x=0,\,1,\,2,\,...,\,n-1,\\ \theta^n & \text{if } x=n.\end{cases}$$

の自然な多次元化である。

4. Poisson 分布の場合の考察

定理1，2，4，5を、一般の Exponential family に拡張できない。なぜなら、stepwise Bayes 法を用いた許容性の証明は、母数空間がコンパクトのときに有効だが、母数空間がコンパクトでない場合には有用でない。たとえば、ポアソン分布の母数空間はノンコンパクトである。実際、ポアソン分布の場合、stepwise Bayesian procedure によって許容性を証明できない。しかしながら、定理1，2の証明中で用いた変数変換を用いると、Poisson 分布の場合、MLE が容易に求められることがわかった。このことを本節で示す。

例 3 X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Z は互いに独立で、$X_i \sim Poisson(\lambda_i)$, i=1,2,3.

$$Y_i \sim Poisson(\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}),\ \text{i=1,2,}\quad Z\sim Poisson(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$$

なるモデルに対して、MLE を求める：

$$\begin{aligned}P(x,y,z\,|\,\lambda) &\propto \lambda_1^{x_1}\lambda_2^{x_2}\lambda_3^{x_3}\exp(-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\\ &\times\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\Big)^{y_1}\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\Big)^{y_2}\exp(-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3})\\ &\times\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^{z}\exp(-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})\end{aligned}$$

変数変換 $s=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\quad t=\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3),\quad u=\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$ を用いると、
$\lambda_1=st,\ \lambda_2=su,\ \lambda_3=s(1-t-u)$ であるから

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{st}{st+su}=\frac{t}{t+u}$$

ここで、更に変数変換 $w=t+u,\ v=t/(t+u)$ を用いると

$$t=wu,\ u=w-t=w(1-v),\ 1-t-u=1-wv-w(1-v)=1-w$$

$$\lambda_1=st=swv,\ \lambda_2=su=sw(1-v),\ \lambda_3=s(1-t-u)=s(1-w)$$

$$Likelihood\propto(swv)^{x_1}(sw(1-v))^{x_2}(s(1-w))^{x_3}\exp(-s)(wv)^{y_1}(w(1-v))^{y_2}\exp(-w)v^z\exp(-v)$$

$$\ln L=C+(x_1+x_2+x_3)\ln s-s+(x_1+x_2+y_1+y_2)\ln w+x_3\ln(1-w)-w$$
$$+(x_1+y_1+z)\ln v+(x_2+y_2)\ln(1-v)-v$$

$$0=\frac{\partial\ln L}{\partial s}=\frac{x_1+x_2+x_3}{s}-1\quad\Rightarrow\quad\hat{s}=x_1+x_2+x_3$$

$$0=\frac{\partial\ln L}{\partial w}=\frac{x_1+x_2+y_1+y_2}{w}-\frac{x_3}{1-w}-1$$

$$0=\frac{\partial\ln L}{\partial v}=\frac{x_1+y_1+z}{v}-\frac{x_2+y_2}{1-v}-1$$

$$\therefore\quad w^2-(x_1+x_2+y_1+y_2+x_3+1)w+x_1+x_2+y_1+y_2=0$$

$$v^2-(x_1+x_2+y_1+y_2+z+1)v+x_1+y_1+z=0$$

この w,v に関する二次方程式は、$0\le w\le 1,\ 0\le v\le 1$ の間で唯一の解を持ち、その解は

$$\hat{w}=\frac{1}{2}\left(x_1+x_2+y_1+y_2+x_3+1-\sqrt{(x_1+x_2+y_1+y_2+x_3+1)^2-4(x_1+x_2+y_1+y_2)}\right)$$

$$\hat{v}=\frac{1}{2}\left(x_1+x_2+y_1+y_2+z+1-\sqrt{(x_1+x_2+y_1+y_2+z+1)^2-4(x_1+y_1+z)}\right)$$

例 3-2　例 3 の一般化を行う。すなわち
第 1 回目の観測　$(X_{11},X_{12},...,X_{1,k-1},X_{1k})$,　第 2 回目の観測　$(X_{21},X_{22},...,X_{2k-1})$,　$\cdots$
第 k-1 回目の観測　$(X_{k-1,1},X_{k-1,2})$,　第 k 回目の観測　X_k
$X_{11},X_{12},...,X_{1,k-1},X_{1k},X_{21},X_{22},...,X_{2,k-1},...,X_{k-1,1},X_{k-1,2},X_k$ は、すべて独立であって

$$X_{1i}\sim Poisson(\lambda_i),\quad X_{2i}\sim Poisson(\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_k}),X_{3i}\sim Poisson(\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_{k-1}}),$$

$$\cdots,X_{k-1i}\sim Poisson(\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}),\quad X_k\sim Poisson(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$$

の時に $\hat{\lambda}_i$ を求める。

$$Likelihood\propto\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i^{x_{1i}}\right)\exp(-\lambda_1-\lambda_2-...-\lambda_k)$$

$$\times\Big(\prod_{i=1}^{k-1}\Big(\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{k-1}+\lambda_k}\Big)^{x_{2i}}\Big)\exp\Big(-\frac{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{k-1}}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{k-1}+\lambda_k}\Big)$$

$$\times\cdots\times\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\Big)^{x_{k-1\,1}}\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\Big)^{x_{k-1\,2}}\exp(-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3})$$

$$\times\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^{x_k}\exp(-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$$

変数変換

$$s_k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k,\quad s_{k-1}=\frac{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{k-1}}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{k-1}+\lambda_k},\quad s_{k-2}=\frac{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{k-2}}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1}},$$

$$\cdots,\quad s_2=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3},\quad s_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

を用いると

$$\lambda_1=s_1s_2\cdots s_k,\quad \lambda_2=(1-s_1)s_2\cdots s_k,\quad \lambda_3=(1-s_2)s_3\cdots s_k,\quad\cdots,$$

$$\lambda_{k-1}=(1-s_{k-2})s_{k-1}s_k,\quad \lambda_k=(1-s_{k-1})s_k$$

である。よって

$$\begin{aligned}
\mathit{Likelihood}\propto\ &(s_1s_2\cdots s_k)^{x_{11}}((1-s_1)s_2\cdots s_k)^{x_{12}}((1-s_2)s_3\cdots s_k)^{x_{13}}\cdots((1-s_{k-1})s_k)^{x_{1k}}\exp(-s_k)\\
&\times(s_1\cdots s_{k-1})^{x_{21}}((1-s_1)s_2\cdots s_{k-1})^{x_{22}}\cdots((1-s_{k-2})s_{k-1})^{x_{2\,k-1}}\exp(-s_{k-1})\\
&\times\cdots\times(s_1s_2s_3)^{x_{k-2,1}}((1-s_1)s_2s_3)^{x_{k-2,2}}((1-s_2)s_3)^{x_{k-2,3}}\exp(-s_3)\\
&\times(s_1s_2)^{x_{k-1\,1}}((1-s_1)s_2)^{x_{k-1\,2}}\exp(-s_2)\times s_1^{x_k}\exp(-s_1)\\
&=s_1^{x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{k-1,1}+x_k}((1-s_1)^{x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{k-1,2}}\exp(-s_1)\\
&\times s_2^{x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{k-1,1}+x_{k-1,2}}(1-s_2)^{x_{13}+x_{23}+\cdots+x_{k-2,3}}\exp(-s_2)\\
&\times\cdots\times s_{k-1}^{x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1k}+x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2\,k-1}}(1-s_{k-1})^{x_{1k}}\exp(-s_{k-1})\\
&\times s_k^{x_{11}+\cdots+x_{1k}}\exp(-s_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln L=C&+(x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{k-1,1}+x_k)\ln s_1+(x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{k-1,2})\ln(1-s_1)-s_1\\
&+(x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{k-1,1}+x_{k-1,2})\ln s_2+(x_{13}+\cdots+x_{k-2,3})\ln(1-s_2)-s_2\\
&+\cdots+(x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1k}+x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2,k-1})\ln s_3+x_{1k}\ln(1-s_{k-1})-s_{k-1}\\
&+(x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1k})\ln s_k-s_k
\end{aligned}$$

$$0=\frac{\partial\ln L}{\partial s_1}=\frac{\sum_{i=1}^{k-1}x_{i1}+x_k}{s_1}-\frac{\sum_{i=1}^{k-1}x_{i2}}{1-s_1}-1,\quad 0=\frac{\partial\ln L}{\partial s_2}=\frac{\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{k-1}x_{ij}}{s_2}-\frac{\sum_{i=1}^{k-2}x_{i3}}{1-s_2}-1,$$

$$\cdots,\quad 0=\frac{\partial\ln L}{\partial s_{k-1}}=\frac{\sum_{j=1}^{k}x_{1j}+\sum_{j=1}^{k-1}x_{2j}}{s_{k-1}}-\frac{x_{1k}}{1-s_{k-1}}-1,$$

$$0=\frac{\partial \ln L}{\partial s_k}=\frac{\sum_{j=1}^{k}x_{1j}}{s_k}-1 \quad \Rightarrow \quad \hat{s}_k=\sum_{j=1}^{k}x_{1j}$$

よって $\hat{s}_i$ i=1,2,...,k-1 は、上記から得られる二次方程式の解で exact に求まる。それゆえ、$\hat{\lambda}_i$ i=1,2,...,k-1 も exact に求まる。

例 3 では X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Z は互いに独立で、$X_i{\sim}Poisson(\lambda_i)$, i=1,2,3.

$Y_i{\sim}Poisson(\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3})$, i=1,2, $Z{\sim}Poisson(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$

なるモデルに対して、MLE を求めたが、今度は

例 3-3 $X_{11},X_{12},X_{13},X_{21},X_{22},X_3$ は互いに独立で、$X_{1i}{\sim}Poisson(\lambda_i)$, i=1,2,3.

$X_{2i}{\sim}Poisson(\mu_2\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2})$, i=1,2, $X_3{\sim}Poisson(\mu_3)$

なるモデルに対して、MLE を求めてみる。例３同様の変数変換を用いると

$$\begin{aligned}
Likelihood &\propto \lambda_1^{x_{11}}\lambda_2^{x_{12}}\lambda_3^{x_{13}}\exp(-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\\
&\quad\times\Big(\frac{\mu_2\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^{x_{21}}\Big(\frac{\mu_2\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^{x_{22}}\exp(-\mu_2)\times\mu_3^{x_3}\exp(-\mu_3)\\
&=(s_1s_2s_3)^{x_{11}}((1-s_1)s_2s_3)^{x_{12}}((1-s_2)s_3)^{x_{13}}\exp(-s_3)\\
&\quad\times(\mu_2s_1)^{x_{21}}(\mu_2(1-s_1))^{x_{22}}\exp(-\mu_2)\times\mu_3^{x_3}\exp(-\mu_3)\\
&=s_1^{x_{11}+x_{21}}((1-s_1)^{x_{12}+x_{22}}s_2^{x_{11}+x_{12}}(1-s_2)^{x_{13}}\times s_3^{x_{11}+x_{12}+x_{13}}\exp(-s_3)\\
&\quad\times\mu_2^{x_{21}+x_{22}}\exp(-\mu_2)\times\mu_3^{x_3}\exp(-\mu_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln L=C&+(x_{11}+x_{21})\ln s_1+(x_{12}+x_{22})\ln(1-s_1)+(x_{11}+x_{12})\ln s_2+x_{13}\ln(1-s_2)\\
&+(x_{11}+x_{12}+x_{13})\ln s_3-s_3+(x_{21}+x_{22})\ln\mu_2-\mu_2+x_3\ln\mu_3-\mu_3
\end{aligned}$$

$$0=\frac{\partial \ln L}{\partial s_1}=\frac{x_{11}+x_{21}}{s_1}-\frac{x_{12}+x_{22}}{1-s_1} \quad\Rightarrow\quad \hat{s}_1=\frac{x_{11}+x_{21}}{x_{11}+x_{21}+x_{12}+x_{22}}$$

$$0=\frac{\partial \ln L}{\partial s_2}=\frac{x_{11}+x_{12}}{s_2}-\frac{x_{13}}{1-s_2} \quad\Rightarrow\quad \hat{s}_2=\frac{x_{11}+x_{12}}{x_{11}+x_{12}+x_{13}}$$

$$0=\frac{\partial \ln L}{\partial s_3}=\frac{x_{12}+x_{12}+x_{13}}{s_3}-1 \quad\Rightarrow\quad \hat{s}_3=x_{11}+x_{12}+x_{13}$$

$$0=\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2}=\frac{x_{21}+x_{22}}{\mu_2}-1 \quad\Rightarrow\quad \hat{\mu_2}=x_{21}+x_{22}$$

$$0=\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_3}=\frac{x_3}{\mu_3}-1 \quad\Rightarrow\quad \hat{\mu}_3=x_3$$

$$\therefore\quad \hat{\lambda}_1=\hat{s}_1\hat{s}_2\hat{s}_3=\frac{(x_{11}+x_{21})(x_{11}+x_{12})}{x_{11}+x_{21}+x_{12}+x_{22}},\quad \hat{\lambda}_2=(1-\hat{s}_1)\hat{s}_2\hat{s}_3=\frac{(x_{12}+x_{22})(x_{11}+x_{12})}{x_{11}+x_{21}+x_{12}+x_{22}},$$

$$\hat{\lambda}_3=(1-\hat{s}_2)\hat{s}_3=x_{13}.$$

例 3-4 例 3-3 で、$\mu_2=\mu_3=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ の場合を考える。すなわち
$X_{11},X_{12},X_{13},X_{21},X_{22},X_3$ は互いに独立で、X_{1i}~$Poisson(\lambda_i)$, i=1,2,3
X_{2i}~$Poisson((\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2})$, i=1,2, X_3~$Poisson(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$
なるモデルに対して、MLE を求めると

$$\begin{aligned}Likelihood &\propto 8(s_1s_2s_3)^{x_{11}}((1-s_1)s_2s_3)^{x_{12}}((1-s_2)s_3)^{x_{13}}\exp(-s_3)\\ &\times(s_3s_1)^{x_{21}}(s_3(1-s_1))^{x_{22}}\exp(-s_3)\times s_3^{x_3}\exp(-s_3)\\ &= s_1^{x_{11}+x_{21}}((1-s_1)^{x_{12}+x_{22}}s_2^{x_{11}+x_{12}}(1-s_2)^{x_{13}}s_3^{x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{21}+x_{22}+x_3}\exp(-3s_3)\end{aligned}$$

$$\hat{s}_1=\frac{x_{11}+x_{21}}{x_{11}+x_{21}+x_{12}+x_{22}},\quad \hat{s}_2=\frac{x_{11}+x_{12}}{x_{11}+x_{12}+x_{13}},$$
$$\hat{s}_3=\frac{x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{21}+x_{22}+x_3}{3}=\frac{x_{total}}{3}$$

$$\hat{\lambda}_1=\hat{s_1}\hat{s_2}\hat{s_3}=\frac{x_{11}+x_{21}}{x_{11}+x_{21}+x_{12}+x_{22}}\frac{x_{11}+x_{12}}{x_{11}+x_{12}+x_{13}}\frac{x_{total}}{3}$$
$$\hat{\lambda}_2=(1-\hat{s_1})\hat{s_2}\hat{s_3}=\frac{x_{12}+x_{22}}{x_{11}+x_{21}+x_{12}+x_{22}}\frac{x_{11}+x_{12}}{x_{11}+x_{12}+x_{13}}\frac{x_{total}}{3}$$
$$\hat{\lambda}_3=(1-\hat{s_2})\hat{s_3}=\frac{x_{13}}{x_{11}+x_{12}+x_{13}}\frac{x_{total}}{3}$$

例 3-5 例 3-4 の一般化 すなわち
第 1 回目の観測： $(X_{11},X_{12},...,X_{1k-1},X_{1k})$, 第 2 回目の観測： $(X_{21},X_{22},...,X_{2k-1}),\cdots$.
第 k-1 回目の観測： $(X_{k-1\,1},X_{k-1\,2})$, 第 k 回目の観測： X_k に対して
$X_{11},X_{12},...,X_{1k-1},X_{1k},X_{21},X_{22},...,X_{2k-1},...,X_{k-1\,1},X_{k-1\,2},X_k$ は、すべて独立であって

$$X_{1i}\sim Poisson(\lambda_i),\quad i=1,2,...,k$$
$$X_{2i}\sim Poisson((\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_k)\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_{k-1}}),\quad i=1,2,...,k-1$$
$$X_{3i}\sim Poisson((\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_k)\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_{k-2}}),\quad i=1,2,...,k-2$$
$$\vdots$$
$$X_{k-1i}\sim Poisson((\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_k)\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2}),\quad i=1,2$$
$$X_k\sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_k)$$

と仮定する。この場合に MLE を求める。

$$Likelihood\propto\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i^{x_{1i}}\right)\exp(-(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_k))$$

$$\times\Big(\prod_{i=1}^{k-1}\Big((\lambda_1+\ldots+\lambda_k)\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\ldots+\lambda_{k-1}}\Big)^{x_{2i}}\Big)\exp(-(\lambda_1+\ldots+\lambda_k))\times\cdots$$

$$\times\Big((\lambda_1+\ldots+\lambda_k)\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^{x_{k-1\,1}}\Big((\lambda_1+\ldots+\lambda_k)\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^{x_{k-1\,2}}\exp(-(\lambda_1+\ldots+\lambda_k))$$

$$\times(\lambda_1+\ldots+\lambda_k)^{x_k}\exp(-(\lambda_1+\ldots+\lambda_k))$$

先ほどと全く同じ変数変換を用いると

$$Likelihood \propto (s_1s_2\cdots s_k)^{x_{11}}((1-s_1)s_2\cdots s_k)^{x_{12}}((1-s_2)s_3\cdots s_k)^{x_{13}}\cdots((1-s_{k-1})s_k)^{x_{1k}}\exp(-s_k)$$

$$\times(s_ks_1\cdots s_{k-2})^{x_{21}}(s_k(1-s_1)s_2\cdots s_{k-2})^{x_{22}}\cdots(s_k(1-s_{k-2}))^{x_{2\,k-1}}\exp(-s_k)\times\cdots$$

$$\times(s_ks_1s_2)^{x_{k-2\,1}}(s_k(1-s_1)s_2)^{x_{k-2\,2}}(s_k(1-s_2))^{x_{k-2\,3}}\exp(-s_k)$$

$$\times(s_ks_1)^{x_{k-1\,1}}(s_k(1-s_1))^{x_{k-1\,2}}\exp(-s_k)\times s_k^{x_k}\exp(-s_k)$$

$$=s_1^{x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{k-1\,1}+x_k}((1-s_1)^{x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{k-1\,2}}$$

$$\times s_2^{x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{k-2\,1}+x_{k-2\,2}}(1-s_2)^{x_{13}+x_{23}+\cdots+x_{k-2\,3}}\times\cdots$$

$$\times s_{k-2}^{x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1\,k-2}+x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2\,k-2}}(1-s_{k-2})^{x_{1\,k-1}+x_{2\,k-1}}$$

$$\times s_{k-1}^{x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1\,k-1}}(1-s_{k-1})^{x_{1k}}\times s_k^{x_{total}}\exp(-ks_k)$$

但し $x_{total}=\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-i+1}x_{ij}+x_k$. 従って

$$\ln L=C+(x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{k-1\,1}+x_k)\ln s_1+(x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{k-1\,2})\ln(1-s_1)$$

$$+(x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{k-2\,1}+x_{k-2\,2})\ln s_2+(x_{13}+x_{23}+\cdots+x_{k-2\,3})\ln(1-s_2)$$

$$+\cdots$$

$$+(x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1\,k-2}+x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2\,k-2})\ln s_{k-2}+(x_{1\,k-1}+x_{2\,k-1})\ln(1-s_{k-2})$$

$$+(x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1k-1})\ln s_{k-1}+x_{1k}\ln(1-s_{k-1})+x_{total}\ln s_k-ks_k$$

$$0=\frac{\partial\ln L}{\partial s_1}=\frac{\sum_{i=1}^{k-1}x_{i1}+x_k}{s_1}-\frac{\sum_{i=1}^{k-1}x_{i2}}{1-s_1}\quad\Rightarrow\quad\hat{s}_1=\frac{\sum_{i=1}^{k-1}x_{i1}+x_k}{\sum_{i=1}^{k-1}(x_{i1}+x_{i2})+x_k}$$

$$0=\frac{\partial\ln L}{\partial s_2}=\frac{\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{k-2}x_{ij}}{s_2}-\frac{\sum_{i=1}^{k-2}x_{i3}}{1-s_2}\quad\Rightarrow\quad\hat{s}_2=\frac{\sum_{i=1}^{k-2}(x_{i1}+x_{i2})}{\sum_{i=1}^{k-1}(x_{i1}+x_{i2}+x_{i3})}$$

$$\cdots\cdots$$

$$0=\frac{\partial\ln L}{\partial s_{k-1}}=\frac{\sum_{j=1}^{k-1}x_{1j}}{s_{k-1}}-\frac{x_{1k}}{1-s_{k-1}}\quad\Rightarrow\quad\hat{s}_{k-1}=\frac{\sum_{j=1}^{k-1}x_{1j}}{\sum_{j=1}^{k}x_{1j}}$$

$$0=\frac{\partial\ln L}{\partial s_k}=\frac{x_{total}}{s_k}-k\quad\Rightarrow\quad\hat{s}_k=\frac{x_{total}}{k}$$

これより、各 $\hat{\lambda}_i$ は、$\hat{\lambda}_1 = \hat{s}_1\hat{s}_2\cdots\hat{s}_k$, $\hat{\lambda}_2 = (1-\hat{s}_1)\hat{s}_2\cdots\hat{s}_k$, $\hat{\lambda}_3 = (1-\hat{s}_2)\hat{s}_3\cdots\hat{s}_k$, ..., $\hat{\lambda}_k = (1-\hat{s}_{k-1})\hat{s}_k$ によって求まる。

例 4 $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Z$ は互いに独立で、$X_i \sim Poisson(\lambda_i)$, $i = 1,2,3$, $Y_1 \sim Poisson(\lambda_1)$, $Y_2 \sim Poisson(\lambda_2+\lambda_3)$, $Z \sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$ なるモデルに対して、MLE を求める：

$$P(x,y,z\,|\,\lambda) \propto \lambda_1^{x_1}\lambda_2^{x_2}\lambda_3^{x_3}\exp(-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\times\lambda_1^{y_1}(\lambda_2+\lambda_3)^{y_2}\exp(-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))$$
$$\times(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^z\exp(-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))$$

MLE を求めるのに、次の変数変換を用いると容易に計算できる

$$\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \quad t = \lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3), \quad u = \lambda_2/(\lambda_2+\lambda_3).$$

$$\therefore\ \lambda_1 = \lambda t, \quad \lambda_2 = \lambda(1-t)u, \quad \lambda_3 = \lambda(1-t)(1-u).$$

$$\therefore\ P(x,y,z\,|\,\lambda) \propto \lambda^{x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+z}\exp(-3\lambda)t^{x_1+y_1}(1-t)^{x_2+x_3+y_2}u^{x_2}(1-u)^{x_3}.$$

これより直ちに

$$\hat{\lambda} = \frac{x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+z}{3}, \quad \hat{t} = \frac{x_1+y_1}{x_1+x_2+y_1+y_2+x_3}, \quad \hat{u} = \frac{x_2}{x_2+x_3}$$

を得る。よって

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}\hat{t} = \frac{x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+z}{3}\frac{x_1+y_1}{x_1+y_1+x_2+y_2+x_3},$$

$$\hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}(\hat{t}-1)\hat{u} = \frac{x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+z}{3}\frac{x_2+y_2+x_3}{x_1+y_1+x_2+y_2+x_3}\frac{x_2}{x_2+x_3},$$

$$\hat{\lambda}_3 = \hat{\lambda}(1-\hat{t})(1-\hat{u}) = \frac{x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+z}{3}\frac{x_2+y_2+x_3}{x_1+y_1+x_2+y_2+x_3}\frac{x_3}{x_2+x_3}.$$

5. single proper prior による Bayes 推定

Poisson 分布に対し、通常の Bayes 推定では、パラメーター λ_i i=1,2,.. の事前分布に、共役分布族であるガンマ分布を仮定する。さて、ガンマ分布には次のような都合の良い性質がある。

Property 1. $W_i \sim Gamma(\alpha_i, \beta)$, i=1,2,3. W_1, W_2, W_3 are independent, then

$$S_3 = W_1+W_2+W_3, \qquad S_2 = \frac{W_1+W_2}{W_1+W_2+W_3}, \qquad S_1 = \frac{W_1}{W_1+W_2}$$

are mutually independent and $S_3 \sim Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \beta)$, $S_2 \sim Beta(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_3)$ $S_1 \sim Beta(\alpha_1, \alpha_2)$

例 3-3 の続き Property 1 を用いて、例 3-3 のモデルに対して、事前分布

$$d\tau(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \propto \lambda_1^{\alpha_1-1}\exp(-\beta\lambda_1)\lambda_2^{\alpha_2-1}\exp(-\beta\lambda_2)\lambda_3^{\alpha_3-1}\exp(-\beta\lambda_3)\ d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3$$

を用いた時の Bayes 推定量を求める。パラメータの変数変換は、前回同様

$$s_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}, \quad s_2 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}, \quad s_3 = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$$

を用いる。 λ_1, λ_2, λ_3 について解くと、$\lambda_1 = s_1 s_2 s_3$, $\lambda_2 = (1-s_1)s_2 s_3$, $\lambda_3 = (1-s_2)s_3$ であるから、Property 1 により

$$d\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \propto s_3^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1} \exp(-\beta s_3) s_2^{\alpha_1+\alpha_2-1}(1-s_2)^{\alpha_3-1} s_1^{\alpha_1-1}(1-s_1)^{\alpha_2-1} ds_1 ds_2 ds_3$$

である。そして、$\mathit{Likelihood} \propto s_1^{x_{11}+x_{21}}(1-s_1)^{x_{12}+x_{22}} s_2^{x_{11}+x_{12}}(1-s_2)^{x_{13}} s_3^{x_{total}} \exp(-3s_3)$ であるから

$$\mathit{Likelihood} \times \mathit{prior} \propto s_3^{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1} \exp(-(\beta+3)s_3) s_2^{x_{11}+x_{12}+\alpha_1+\alpha_2-1}(1-s_2)^{x_{13}+\alpha_3-1}$$
$$\times s_1^{x_{11}+x_{21}+\alpha_1-1}(1-s_1)^{x_{12}+x_{22}+\alpha_2-1} ds_3 ds_2 ds_1$$

$$\int \mathit{Likelihood} \times \mathit{prior} \propto \int s_3^{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1} \exp(-(\beta+3)s_3) ds_3$$
$$\times \int s_2^{x_{11}+x_{12}+\alpha_1+\alpha_2-1}(1-s_2)^{x_{13}+\alpha_3-1} ds_2 \int s_1^{x_{11}+x_{21}+\alpha_1-1}(1-s_1)^{x_{12}+x_{22}+\alpha_2-1} ds_1$$
$$= \frac{\Gamma(x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{(\beta+3)^{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}} \mathrm{B}(x_{11}+x_{12}+\alpha_1+\alpha_2, x_{13}+\alpha_3)\, \mathrm{B}(x_{11}+x_{21}+\alpha_1, x_{12}+x_{22}+\alpha_2)$$

同様に

$$\int \lambda_1 \times \mathit{Likelihood} \times \mathit{prior} = \int s_1 s_2 s_3 \times \mathit{Likelihood} \times \mathit{prior}$$
$$\propto \frac{\Gamma(x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1)}{(\beta+3)^{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1}}$$
$$\times \mathrm{B}(x_{11}+x_{12}+\alpha_1+\alpha_2+1, x_{13}+\alpha_3)\, \mathrm{B}(x_{11}+x_{21}+\alpha_1+1, x_{12}+x_{22}+\alpha_2)$$

$$\int \lambda_2 \times \mathit{Likelihood} \times \mathit{prior} = \int (1-s_1)s_2 s_3 \times \mathit{Likelihood} \times \mathit{prior}$$
$$\propto \frac{\Gamma(x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1)}{(\beta+3)^{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1}}$$
$$\times \mathrm{B}(x_{11}+x_{12}+\alpha_1+\alpha_2+1, x_{13}+\alpha_3)\, \mathrm{B}(x_{11}+x_{21}+\alpha_1, x_{12}+x_{22}+\alpha_2+1)$$

$$\int \lambda_3 \times \mathit{Likelihood} \times \mathit{prior} = \int (1-s_2)s_3 \times \mathit{Likelihood} \times \mathit{prior}$$
$$\propto \frac{\Gamma(x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1)}{(\beta+3)^{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1}}$$
$$\times \mathrm{B}(x_{11}+x_{12}+\alpha_1+\alpha_2, x_{13}+\alpha_3+1)\, \mathrm{B}(x_{11}+x_{21}+\alpha_1, x_{12}+x_{22}+\alpha_2)$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{\int \lambda_1 \times \mathit{Likelihood} \times \mathit{prior}}{\int \mathit{Likelihood} \times \mathit{prior}}$$
$$= \frac{1}{\beta+3} \frac{\Gamma(x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1)}{\Gamma(x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}$$
$$\times \frac{\mathrm{B}(x_{11}+x_{12}+\alpha_1+\alpha_2+1, x_{13}+\alpha_3)\, \mathrm{B}(x_{11}+x_{21}+\alpha_1+1, x_{12}+x_{22}+\alpha_2)}{\mathrm{B}(x_{11}+x_{12}+\alpha_1+\alpha_2, x_{13}+\alpha_3)\, \mathrm{B}(x_{11}+x_{21}+\alpha_1, x_{12}+x_{22}+\alpha_2)}$$
$$= \frac{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{\beta+3} \frac{x_{11}+x_{12}+\alpha_1+\alpha_2}{x_{11}+x_{12}+x_{13}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \frac{x_{11}+x_{21}+\alpha_1}{x_{11}+x_{21}+x_{12}+x_{22}+\alpha_1+\alpha_2}$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{\int \lambda_2 \times Likelihood \times prior}{\int Likelihood \times prior}$$
$$= \frac{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{\beta+3} \frac{x_{11}+x_{12}+\alpha_1+\alpha_2}{x_{11}+x_{12}+x_{13}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \frac{x_{12}+x_{22}+\alpha_2}{x_{11}+x_{21}+x_{12}+x_{22}+\alpha_1+\alpha_2}$$
$$\tilde{\lambda}_3 = \frac{\int \lambda_3 \times Likelihood \times prior}{\int Likelihood \times prior} = \frac{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{\beta+3} \frac{x_{13}+\alpha_3}{x_{11}+x_{12}+x_{13}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$$

limit property 上記の結果から、α_1, α_2, α_3, $\beta \to 0$ とすることで、$\tilde{\lambda}_i \to \hat{\lambda}_i \quad (i=1,2,3)$ が得られる。

Property 1 と本質的に同じではあるが、パラメーター変換を多少違えた場合、次のようになる

Property 2. $W_i \sim Gamma(\alpha_i,\beta)$, i=1,2,3. W_1, W_2, W_3 are independent, then

$$S = W_1+W_2+W_3, \qquad T = \frac{W_1}{W_1+W_2+W_3}, \qquad U = \frac{W_2}{W_2+W_3}$$

are mutually independent and $S \sim Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta)$, $T \sim Beta(\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3)$, $U \sim Beta(\alpha_2,\alpha_3)$.

例 4 の続き Property 2 を用いて、例 4 のモデルに対して、事前分布

$$d\tau(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \propto \lambda_1^{\alpha_1-1}\exp(-\beta\lambda_1)\lambda_2^{\alpha_2-1}\exp(-\beta\lambda_2)\lambda_3^{\alpha_3-1}\exp(-\beta\lambda_3)$$
$$= \lambda_1^{\alpha_1-1}\lambda_2^{\alpha_2-1}\lambda_3^{\alpha_3-1}\exp(-\beta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))\, d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3$$

を用いた時の Bayes 推定量を求める。変数変換

$$s=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \quad t=\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3), \quad u=\lambda_2/(\lambda_2+\lambda_3)$$

$\therefore \ \lambda_1 = st,\ \lambda_2 = s(1-t)u,\ \lambda_3 = s(1-t)(1-u)$ により

$$Likelihood \propto \lambda_1^{x_1}\lambda_2^{x_2}\lambda_3^{x_3}\exp(-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\times\lambda_1^{y_1}(\lambda_2+\lambda_3)^{y_2}\exp(-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))$$
$$\times(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^z\exp(-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))$$
$$= s^{x_{total}}\exp(-3s)t^{x_1+y_1}(1-t)^{x_2+x_3+y_2}u^{x_2}(1-u)^{x_3}$$

但し、$x_{total} = x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+z.$

$$prior \propto s^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1}\exp(-\beta s)t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2+\alpha_3-1}u^{\alpha_2-1}(1-u)^{\alpha_3-1}dsdtdu$$

$\therefore \ Likelihood \times prior$

$$\propto s^{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1}\exp(-(\beta+3)s)$$
$$\times t^{x_1+y_1+\alpha_1-1}(1-t)^{x_2+x_3+y_2+\alpha_2+\alpha_3-1}u^{x_2+\alpha_2-1}(1-u)^{x_3+\alpha_3-1}dsdtdu$$

$$\int Likelihood \times prior$$
$$\propto \int s^{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1}\exp(-(\beta+3)s)ds$$

$$\times \int t^{x_1+y_1+\alpha_1-1}(1-t)^{x_2+x_3+y_2+\alpha_2+\alpha_3-1}dt \int u^{x_2+\alpha_2-1}(1-u)^{x_3+\alpha_3-1}du$$

$$= \frac{\Gamma(x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{(\beta+3)^{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}}$$

$$\times \mathrm{B}(x_1+y_1+\alpha_1, x_2+x_3+y_2+\alpha_2+\alpha_3)\ \mathrm{B}(x_2+\alpha_2, x_3+\alpha_3)$$

同様に

$$\int \lambda_1 \times Likelihood \times prior = \int st \times Likelihood \times prior$$

$$\propto \frac{\Gamma(x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1)}{(\beta+3)^{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1}}$$

$$\times \mathrm{B}(x_1+y_1+\alpha_1+1, x_2+x_3+y_2+\alpha_2+\alpha_3)\ \mathrm{B}(x_2+\alpha_2, x_3+\alpha_3)$$

$$\int \lambda_2 \times Likelihood \times prior = \int s(1-t)u \times Likelihood \times prior$$

$$\propto \frac{\Gamma(x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1)}{(\beta+3)^{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1}}$$

$$\times \mathrm{B}(x_1+y_1+\alpha_1, x_2+x_3+y_2+\alpha_2+\alpha_3+1)\ \mathrm{B}(x_2+\alpha_2+1, x_3+\alpha_3)$$

$$\int \lambda_3 \times Likelihood \times prior = \int s(1-t)(1-u) \times Likelihood \times prior$$

$$\propto \frac{\Gamma(x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1)}{(\beta+3)^{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1}}$$

$$\times \mathrm{B}(x_1+y_1+\alpha_1, x_2+x_3+y_2+\alpha_2+\alpha_3+1)\ \mathrm{B}(x_2+\alpha_2, x_3+\alpha_3+1)$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{\int \lambda_1 \times Likelihood \times prior}{\int Likelihood \times prior}$$

$$= \frac{1}{\beta+3}\frac{\Gamma(x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1)}{\Gamma(x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}$$

$$\times \frac{\mathrm{B}(x_1+y_1+\alpha_1+1, x_2+x_3+y_2+\alpha_2+\alpha_3)}{\mathrm{B}(x_1+y_1+\alpha_1, x_2+x_3+y_2+\alpha_2+\alpha_3)}\ \frac{\mathrm{B}(x_2+\alpha_2, x_3+\alpha_3)}{\mathrm{B}(x_2+\alpha_2, x_3+\alpha_3)}$$

$$= \frac{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{\beta+3}\ \frac{x_1+y_1+\alpha_1}{x_1+y_1+x_2+x_3+y_2+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{\int \lambda_2 \times Likelihood \times prior}{\int Likelihood \times prior}$$

$$= \frac{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{\beta+3}\ \frac{x_2+x_3+y_2+\alpha_2+\alpha_3}{x_1+y_1+x_2+x_3+y_2+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\ \frac{x_2+\alpha_2}{x_2+x_3+\alpha_2+\alpha_3}$$

$$\tilde{\lambda}_3 = \frac{\int \lambda_3 \times Likelihood \times prior}{\int Likelihood \times prior}$$

$$= \frac{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{\beta+3}\ \frac{x_2+x_3+y_2+\alpha_2+\alpha_3}{x_1+y_1+x_2+x_3+y_2+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\ \frac{x_3+\alpha_3}{x_2+x_3+\alpha_2+\alpha_3}$$

limit property　上記の結果から、α_1, α_2, α_3, $\beta \to 0$ とすることで、$\tilde{\lambda}_i \to \hat{\lambda}_i \quad (i=1,2,3)$ が得られる。

Blyth の方法を用いた許容性について　例 3-3, 例 4 にて、MLE が limit Bayes ゆえ「許容的な推定量で近似される」ことまではわかった。しかし、許容的な推定量で近似されても、MLE が許容性だと断言できない。Blyth(1951) は、「目的の推定量が、ベイズ推定量によって、ベイズリスクという measurement で近づくことが示されれば、許容的」という定理を示した。よって、Blyth の方法によって許容性を示すには、単に limit Bayes だけでは不十分で、ベイズリスクも近づくことを示さなくてはならない。

一次元 Poisson 分布: $P(X\,|\,\lambda) = \lambda^x exp(-\lambda)/x!$ の MLE $\hat{\delta}(x) = x$ が、自乗損失下で許容的であることを Blyth の方法で証明するには、次のようにすればよい：，事前分布として、$d\tau_{\alpha,\beta}(\lambda) \propto \lambda^{\alpha-1}exp(-\beta\lambda)d\lambda$ を選ぶ。この事前分布に対する Bayes estimator は $\delta_{\alpha,\beta}(x) = (x+\alpha)/(1+\beta)$ 。$R(\lambda, \delta_{\alpha,\beta}) = E_\lambda(\lambda - [(X+\alpha)/(1+\beta)])^2 = ((\alpha-\beta\lambda)^2+\lambda)/(1+\beta)^2$, $\gamma(d\tau_{\alpha,\beta}, \delta_{\alpha,\beta}) = \alpha/(\beta(1+\beta))$. 他方、$\hat{\delta}(x) = x$ に対して $R(\lambda, \hat{\delta}) = E_\lambda[\lambda - X]^2 = \lambda$, $\gamma(d\tau_{\alpha,\beta}, \hat{\delta}) = \alpha/\beta$ であり、$\gamma(d\tau_{\alpha,\beta}, \delta_{\alpha,\beta}) - \gamma(d\tau_{\alpha,\beta}, \hat{\delta}) = -\alpha/(1+\beta) \to 0$ when $\alpha, \beta \to 0$. であるから、許容的。

この Blyth の方法を例 3-3, 例 4 に適用できるかも知れないと思い、試みた。しかし、計算が途中でスタックし、成功していない。

Acknowledgement

本稿の著者は、科研費シンポジウム「多変量解析」(1999 年 12 月 7 日－9 日、広島大学) にて Admissibility of the MLE for multinomial distribution with monotone missing data という題名で発表を行った。内容は、主に本稿の定理１，３，４に関するものであった。この発表に対し、座長の狩野裕先生（大阪大・人間科学)、フロアーの辻谷将明先生（大阪電気通信大・情報工)、藤越康祝先生、若木宏文先生（広島大・理）等から、数々の質問・コメントを頂いた。これらの質問・コメントが本稿の定理２，５および第４章以降の基になっている。これらの諸先生方に厚くお礼申し上げたい。

参考文献

[1] Asano, C. (1965) On estimating multinomial probabilities by pooling incomplete samples, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **17**, 1-17.

[2] Blyth, C.R. (1951). On minimax statistical decision procedures and their admissibility. *Annals of Mathemastical Statistics* **22**, 22-42.

[3] Brown, L.D. (1981). A complete class theorem for statistical problems with finite sample space, *Annals of Statistics* **9**, 1289-1300.

[4] Ghosh, M. and Meeden, G. (1997). *Bayesian methods for finite population sampling,* Chapman and Hall.

[5] Hsuan, F. (1979). A stepwise Bayesian procedure, *Annals of Statistics* **7**, 860-868.

[6] Meeden, G., Ghosh, M., Srinivasan. C., and Vardeman, S. (1989). The admissibility of the Kaplan-Meyer and other maximum likelihood estimators in the presence of censoring, *Annals of Statistics* **17** 1509-1531.